www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Université d'Orléans

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

CONCOURS 1989 - Option DEUG A MATHEMATIQUES

(Durée 4 h - Coefficient 4)

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Le soin apporté aux calculs et aux raisonnements sera un élément important d'appréciation.

PROBLEME N° 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$; O_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n$ et I_n sa matrice unité.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ symétriques.

On considère d'autre part l'espace $\mathbb{R}^n$ identifié selon l'usage à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique défini par : $\langle X,Y\rangle = {}^tX \,.\, Y$ où, selon l'usage on note de la même façon l'élément $X = (x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et la matrice unicolonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on notera $\| X \| = (\langle X,X\rangle)^{1/2}$.

Enfin, pour $A \in \mathcal{S}_n$, on note q_A et b_A les applications définies par : $q_A(X) = {}^tX.A.X$, $b_A(X,Y) = {}^tX.A.Y$, pour X et Y dans $\mathbb{R}^n$.

1°) Montrer que la relation définie sur $\mathcal{S}_n$ par :

$M \leqslant N$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a : ${}^tX.M.X \leqslant {}^tX.N.X$

est une relation d'ordre (partiel) sur $\mathcal{S}_n$.

2°) Pour $A \in \mathcal{S}_n$, on note $\mathcal{N}(A) = \sup \{ |{}^tX.A.X| \,/\, X \in \mathbb{R}^n, \ \|X\| = 1 \}$, Sp(A) l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$, et $\rho(A)$ le maximum des valeurs absolues des éléments de Sp(A).

a) Montrer que $\mathcal{N}(A) = \rho(A)$.

b) Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{S}_n$.

c) Montrer que pour A dans $\mathcal{S}_n$ on a, pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^n$:

$$|b_A(X,Y)| \leqslant \mathcal{N}(A).\|X\|.\|Y\|$$

d) En déduire que :

$$\mathcal{N}(A) = \max \{ |b_A(X,Y)| \,/\, X,Y \in \mathbb{R}^n \,,\ \|X\| = \|Y\| = 1 \}.$$

e) Montrer que pour A dans $\mathcal{S}_n$ et tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est dans $\mathcal{S}_n$ et qu'on a : $\mathcal{N}(A^k) = [\mathcal{N}(A)]^k$.

f) Montrer que pour A dans $\mathcal{S}_n$ et r dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathcal{N}(A) \leqslant r \iff -r.I_n \leqslant A \leqslant r.I_n$$

(où à droite de l'équivalence, $\leqslant$ désigne la relation d'ordre définie au 1°).

3°) Pour $M \in \mathcal{M}_n$, on pose $\mathcal{N}'(M) = \sup \{ \|M.X\| \,/\, X \in \mathbb{R}^n, \ \|X\| = 1 \}$.

a) Justifier brièvement que $\mathcal{N}'$, ainsi définie, est une norme sur $\mathcal{M}_n$ telle que, pour toutes M et N dans $\mathcal{M}_n$ on a : $\mathcal{N}'(M.N) \leqslant \mathcal{N}'(M).\mathcal{N}'(N)$.

b) Pour $M \in \mathcal{M}_n$, prouver que $A = {}^tM.M$ est dans $\mathcal{S}_n$ et que $O_n \leqslant A$.

Montrer que M et A ont le même rang, et comparer $\mathcal{N}(A)$ à $\mathcal{N}'(M)$.

c) Soit P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n$.

Calculer $\mathcal{N}'(P)$, et pour tout A dans $\mathcal{M}_n$ comparer $\mathcal{N}'(A)$ à $\mathcal{N}'(P^{-1}.A.P)$.

4°) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n$, croissante : pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A_k \leqslant A_{k+1}$.

Montrer qu'une telle suite converge dans $\mathcal{M}_n$ si et seulement si il existe M dans $\mathcal{S}_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $A_k \leqslant M$, la limite de cette suite étant alors dans $\mathcal{S}_n$.

5°) Soient A dans $\mathcal{S}_n$, $r = \mathcal{N}(A)$, et x dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} x^k.A^k$ converge dans $\mathcal{S}_n$, si et seulement si $|r.x| < 1$.

b) Dans le cas où cette série converge, on note $S_A(x)$ sa somme.

Prouver alors que $(I_n - x.A)$ est inversible et préciser son inverse en fonction de $S_A(x)$.

c) Soit $a \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{k \geqslant 0} a^k.A^k$ converge. Dans ce cas calculer sa somme $S_A(a)$, et vérifier que : $S_A(a).(I_n - a.A) = I_n$.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME N° 2

Dans tout ce problème, on note P l'application définie dans $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que : $P(t,x) = \dfrac{1}{1 - 2.t.\cos(x) + t^2}$

1°) a) Déterminer le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel P est définie et continue.

b) Etudier l'existence d'extrema de P sur D.

2°) Soit t un réel fixé de $]0,1[$. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(t,x) \cos(nx)\, dx$.

a) Etablir les relations

$(1 + t^2)u_n - t(u_{n+1} + u_{n-1}) = 0$ pour $n \geq 1$,

$(1 + t^2)u_0 - 2\, tu_1 = 1$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est combinaison linéaire de deux suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$ telles que $\alpha_n\, \beta_n = 1$ quel que soit n.

c) Démontrer, a l'aide d'une intégration par parties, l'égalité : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

d) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est proportionnelle à l'une des deux suites de b), puis calculer u_n pour tout n.

3°) a) Soit x un réel fixé de $[0,2\pi[$. Déterminer le développement en série entière de l'application $g_x : t \longmapsto (1 - t^2)\, P(t,x)$ au voisinage de 0.

b) Soit $t \in [0,1[$. Montrer que l'application $f_t : x \longmapsto P(t,x)$ admet un développement en série trigonométrique (série de Fourier) de la forme $f_t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

avec $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_t(x) \cos(nx)\, dx$.

4°) a) Etudier, selon les valeurs du réel x dans $[0,2\pi[$, la convergence de l'intégrale. $I(x) = \int_0^1 P(t,x)\, dt$

b) Démontrer, pour $0 < x < \pi$, l'égalité

$$I(x) = \frac{\pi - x}{2 \sin(x)}.$$

c) Déterminer, pour $0 < x < \pi$, le développement en série entière, au voisinage de 0, de

$$h_x : t \longmapsto (\sin x)\, P(t,x),$$

puis démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 h_x(t).dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

(On considèrera l'intégrale de 0 à $t_0 \in [0,1[$ et on justifiera le passage à la limite à l'aide de la transformation d'Abel et d'un argument de continuité).

d) Démontrer, pour tout x de $]0,2\pi[$, l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

5°) a) Soit Q un polynôme à coefficients complexes, $t \in [0,1[$ et $x \in [0,2\pi[$.

Démontrer à l'aide du résultat de la troisième question, l'égalité :

$$Q(te^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-t^2)\, P(t,x-\theta)\, Q(e^{i\theta})\, d\theta.$$

b) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série, à termes complexes, absolument convergente.

On pose : $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

en tout point $z \in \mathbb{C}$ où la série entière converge.

Démontrer, pour tout $r \in [0,1[$ et tout $x \in [0,2\pi[$, l'égalité

$$S(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)\, P(r,x-\theta)\, S(e^{i\theta})\, d\theta.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail